Aula 3

Definição: Diz-se que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferenciável de dimensão** $m < n$ (mergulhada em $\mathbb{R}^n$) e de classe C^k ou, de forma mais concisa, simplesmente **variedade-**m, se, para qualquer ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p)$ centrada em p tal que o conjunto dos pontos de M na bola, ou seja o conjunto $M \cap B(p)$, pode ser descrito de uma das três seguintes formas equivalentes:

- Como **conjunto de nível** zero de uma função $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, de classe $C^k(\Omega)$, definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tal que a sua matriz jacobiana $DF(x)$ tem característica máxima $(n-m)$ para todo o $x \in M \cap B(p)$:

$$M \cap B(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}.$$

- Como **gráfico** de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe $C^k(A)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$:

$$M \cap B(p) = \{(u,v) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}}_{\mathbb{R}^n} : v = f(u), u \in U\}.$$

- Como imagem duma **parametrização** dada por uma função injetiva $g : T \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(T)$, definida num aberto $T \subset \mathbb{R}^m$, com inversa contínua $g^{-1} : g(T) \to T$, tal que a sua matriz jacobiana tem característica máxima m, para todo o $t \in T$:

$$M \cap B(p) = \{g(t) \in \mathbb{R}^n, t \in T\}.$$

Definição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m.

- Diz-se que um vector $T \in \mathbb{R}^n$ é **tangente** à variedade M, num ponto $p \in M$, se existir uma curva $\gamma \subset M$ que passa em p, à qual T é tangente.

- Ao espaço vectorial (de dimensão m igual à da variedade) gerado pelos vectores tangentes a M em $p \in M$ designa-se por **espaço tangente a M no ponto** p, e representa-se por T_pM.

- Ao espaço vectorial dos vectores ortogonais a T_pM, de dimensão $n-m$, designa-se por **espaço normal a M no ponto** p, e representa-se por $(T_pM)^{\perp}$ ou N_pM.

Obs: Não confundir o espaço tangente T_pM a uma variedade M no ponto $p \in M$ com o plano (ou reta) tangente à variedade, no mesmo ponto. O espaço tangente é um espaço vetorial, e portanto passa pela origem. O plano tangente é paralelo ao espaço tangente e passa no ponto.

Idem para o espaço normal e plano/reta normal.

Proposição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m.

- Se, na vizinhança dum ponto $p \in M$, a variedade for descrita por uma parametrização $g : T \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, então o espaço tangente a M no ponto $p \in M$, T_pM, é o espaço gerado pelas colunas da matriz jacobiana de g no ponto $t_0 = g^{-1}(p)$, ou seja, pelas colunas de $Dg(t_0)$.

- Se, na vizinhança dum ponto $p \in M$, a variedade for descrita por uma equação cartesiana $F(x) = 0$, ou seja, como conjunto de nível zero de uma função $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, então o espaço normal a M no ponto $p \in M$, $(T_pM)^{\perp}$, é o espaço gerado pelas linhas da matriz jacobiana de F no ponto p, ou seja, pela linhas de $DF(x = p)$: $\nabla F_1(x = p)$, $\nabla F_2(x = p)$, $\ldots$,$\nabla F_{n-m}(x = p)$.

Produto Externo (em $\mathbb{R}^3$)

Definição: Designa-se por **produto externo**, e representa-se pelo símbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, a operação $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e_3} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Propriedades: Para quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, tem-se

i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (antisimetria)

iii) $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha\, \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \beta\, \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
$\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta\, \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \gamma\, \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (bilinearidade)

iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

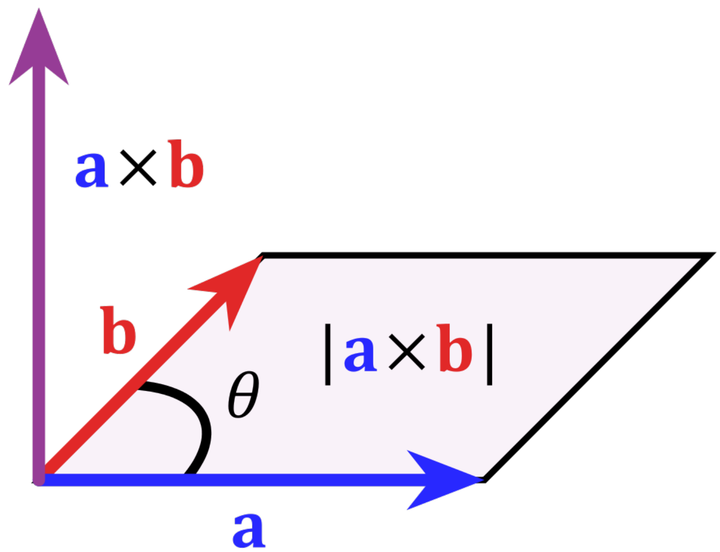
v) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$
($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$)

vi) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

vii) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$,
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo formado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Área do paralelogramo formado por $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$A = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$



Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e seja $\phi : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a superfície. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a superfície S**, e designa-se por

$$\int_S \phi \quad \text{ou} \quad \int_S \phi \, dS,$$

o valor

$$\int_\Omega \phi(g(u,v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv,$$

sempre que este integral (calculado sobre $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$) exista.
Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se a área da superfície S

$$A(S) = \mathrm{Vol}_2(S) = \int_S 1 \, dS = \int_\Omega \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv.$$